CONJUNTOS Y NÚMEROS. Curso 2014-2015. **HOJA 5.**

1) Hoy es martes y son las 17:15h. ¿Qué hora de que día de la semana será dentro de 13^{501} días y 13^{501} horas?

2) Tengo una bolsa con 30 caramelos y los voy a repartir entre mis sobrinos, dándoles 2 caramelos a cada niño y 7 a cada niña. ¿Cuántos sobrinos tengo si la menor de mis sobrinas se llama Silvia, y los mayores de mis sobrinos se llaman Pablo y Julián?

3) Hallar un número de tres cifras tal que dé restos 1, 2 y 3, al ser dividido por 7, 9 y 11 respectivamente.

4) He comprado bolígrafos a 55 céntimos y rotuladores a 71 céntimos. Si me he gastado en total 20 euros, ¿cuántos he comprado de cada?

5) Calcula el resto que queda al dividir 3^{2011} entre 11.

6) Si contamos con los dedos de una mano de la forma habitual (comenzando por el índice y acabando en el pulgar), ¿en qué dedo terminará la cuenta hasta 7^{7^7}? ¿Y si lo hace Homer Simpson, que sólo tiene cuatro dedos?

7) Se considera el conjunto $\mathbb{R}[x]$ de todos los polinomios con coeficientes reales con las operaciones de la suma y la composición (en lugar del producto).

a) Averiguar si estas dos operaciones definen la estuctura de un anillo en $\mathbb{R}[x]$;

b) En caso de respuesta afirmativa, ver si tiene unidad, si es un anillo conmutativo y si tiene divisores de cero.

8) Sea m un número impar no divisible por 5.

a) Demostrar que el desarrollo decimal de $1/m$ es periódico y que dicho periodo es de longitud un divisor de $\varphi(m)$.

Por ejemplo $1/11 = 0.0909\ldots$ y $2 \mid \varphi(11)$; $1/13 = 0.076923076923\ldots$ y $6 \mid \varphi(13)$.

(Sugerencia: Al hacer la división larga el primer resto es 1, ¿cuándo vuelve a aparecer?).

b) Demostrar que si $1/n$ tiene un periodo de longitud $n-1$ entonces n es primo. Encontrar algún número con esta propiedad.

c)* Demostrar que si $1/p$ con $p > 2$ primo tiene periodo de longitud $p-1$ entonces las cifras decimales en los lugares k y $k+(p-1)/2$ siempre suman 9.

9) Encontrar todos los valores enteros de x que satisfacen

$$x^2 - 3x + 3 \equiv 0\,(7)\,.$$

10) Resolver el sistema de conguencias: $x \equiv -5\,(77)$, $x \equiv 17\,(143)$.

11) Resolver el sistema de conguencias: $x \equiv 7\,(8)$, $x \equiv 3\,(12)$.

12) Demostrar que si x e y son dos números reales con $x < y$, entonces existe un racional r tal que $x < r < y$.

13) Demostrar que si x e y son dos números reales con $x < y$, entonces existe un *irracional* t tal que $x < t < y$.

14) Hallar la parte real y la parte imaginaria de

$$a)\ \ \frac{1-i}{1+i}, \qquad b)\ \ \frac{(3-i)(2+i)}{3+i}, \qquad c)\ \ \frac{(2-i)^2}{(3-i)^2}, \qquad d)\ \ \Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)^3.$$

15) Expresar en forma polar: a) $1+i$, b) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$, c) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i$, d) $-2-2i$.

16) Calcular $\exp(2011\pi i)$, $\exp(\pi i/2)$, $\exp(\pi 3^{2011} i/2)$ y $\exp(-\pi i/4)$.

17) Hallar para qué numeros complejos z y w de módulo 1 se cumple $z + w = 2$. ¿Cuándo se cumple $z + w = 1$ con z y w de módulo 1?

18) Calcular las raíces cuadradas (complejas) de los números: $1+i$, $2-i$, $8-6i$, $-8-15i$, $15-8i$.

19) Calcular las raíces complejas de los siguientes polinomios cuadráticos:

a) $z^2 + 3iz - 3 + i$,

b) $2z^2 + 4z + 2 + i$,

c) $z^2 + (2+3i)z - 7/2 - 7i$,

d) $z^2 + (5+i)z + 17i/4$.

20) En principio parece difícil hallar una fórmula para calcular la derivada n-ésima de la función $f(x) = 1/(x^2+1)$. Comprobar que es cierta la identidad

$$\frac{2i}{x^2+1} = \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}$$

y utilizarla para calcular $f^{(4)}(0)$. Establecer una fórmula general para $f^{(n)}(0)$ con $n \in \mathbb{Z}^+$.

21) **a)** Demostrar la identidad

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\operatorname{sen}\big((N+\frac{1}{2})x\big)}{\operatorname{sen}(x/2)}$$

para x que no sea múltiplo entero de 2π.

Sugerencia: Es la suma parcial de una progresión geométrica.

b) Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $N \in \mathbb{N}$, $\big|\operatorname{sen}(2N+1)x\big| \le (2N+1)\,\big|\operatorname{sen} x\big|$.

22) Utilizando las ideas aprendidas en el ejercicio anterior, demostrar que para todo $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$

$$\Big(\tan\frac{\pi}{2N}\Big)\sum_{n=1}^{N} \operatorname{sen}\frac{\pi n}{N} = 1.$$

23) En cálculo, utilizando polinomios de Taylor, se prueba la fórmula $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ con convergencia absoluta para todo $x \in \mathbb{C}$.

Sin embargo no hay en general funciones sencillas que sumen una serie de potencias dada.

a) Buscar una fórmula sencilla para $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$.

Indicación: En el desarrollo para e^x, sustituir x por $i^k\,x$ con $k = 0, 1, 2, 3$.

b) Utilizar un truco similar para encontrar una fórmula para $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

24) Calcular los diferentes valores de $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{-i}$, $\sqrt[4]{16i}$ y de $(1+i)^n + (1-i)^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

25) Dado $n > 1$, demostrar que la suma de todas las raíces n-ésimas de 1 es cero.

Sugerencia: Comprobar que esa suma no cambia al multiplicar por cualquiera de ellas.

26) Sea $z = 2e^{2\pi i/5} + 1 + 2e^{-2\pi i/5}$. Utilizando que $\sum_{k=1}^{5} e^{2\pi k i/5} = 0$ (por el problema anterior), probar que $z^2 = 5$. Deducir de ello una expresión para $\cos(2\pi/5)$, que utiliza sólo raíces cuadradas de números naturales.

27) Demostrar que si dos enteros positivos n y m son suma de dos cuadrados, entonces su producto también lo es. (Sugerencia: $|x+iy|^2 = x^2+y^2$). Notando que $13 = 2^2+3^2$ y $29 = 2^2+5^2$, hallar $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $377 = a^2+b^2$.

28) Denotemos con $\operatorname{Im}(z)$ la parte imaginaria de z y sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc = 1$. Probar las fórmulas

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{c^2+d^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{|z-i|^2}{\operatorname{Im}(z)} + 2 = a^2+b^2+c^2+d^2$$

para $z = (ai+b)/(ci+d)$.

29) Demostrar que la función $f(z) = (z-1)/(z+1)$ establece una biyección de los números complejos con parte real positiva a los que satisfacen $|z| < 1$.

30) Probar que, si $z \ne w$ son complejos con $|z|, |w| \le 1$, se tiene: $\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| \le 1$.